力迫法简介

北京大学哲学系，杨睿之

摘要

集合论是得到当代数学家公认的数学基础，ZFC 是受到最广泛认可的集合论公理系统．然而，ZFC 不是一个完全的公理系统，即存在集合论命题，它和它的否定都与 ZFC 一致．证明命题的一致性往往是当代集合论研究中的主要工作．而力迫法是目前最为有效的一致性证明方法．在当代力迫法的表述中，有基于任意偏序的和基于完全布尔代数两种途径．本文将致力于用较浅显易懂的方式介绍力迫法的证明思路，穿插比较基于偏序和基于布尔代数的两种讲述方式，并演示一组简单的基于力迫法的独立性证明．

关键词：集合论　一致性　力迫法

一、引言

越来越多新出版的分析、拓扑、代数教材开始在书的开头辟出一章介绍集合论的基本概念和定理．经过十九世纪末之二十世纪前期的争论与探索(参见 van Heijenoort [1967] 等)，集合论至少已被数学家们认可为数学的基础．ZFC 是得到最广泛使用和喜爱的一阶集合论公理系统．[1]然而，根据哥德尔第一不完全性定理，ZFC 不是一个完全的公理系统，并且我们不可能得到一个完全且一致的集合论公理系统．有些独立的集合论命题[2]可能在数学中有重要的推论．是否接受这些推论？这是数学基础研究或数学哲学需要回答的问题．当然，弄清这些命题之间相容（即一致）、蕴含等关系是进行上述哲学讨论的前提．

根据哥德尔第二不完全性定理，我们不可能在 ZFC 中证明 ZFC 本身或比之更强的集合论理论的一致性．本文中所谓的一致性证明都是指相对一致性证明．即，假设 ZFC 是一致的，我们证明， ZFC 再加上某个命题仍然可以构成一个一致的理论．

连续统假设 (CH)，即“实数的基数是最小的大于自然数基数的无穷基数”，是一个著名的 ZFC 独立命题的例子．哥德尔在 1938 年 (一说 1937 年) 发明了可构成集的方法证明了连续统假设相对 ZFC 一致．他构造了 ZF 的 (最小) 内模型 $\mathbf{L}$，证明了

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L}).^3 \tag{1.1}$$

[1]ZFC指 Zermelo - Fraenkel 公理系统 (ZF) 加上选择公里 (AC)．

[2]即该命题和它的否定都与 ZFC 一致．

由于 $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ 蕴含 CH，故 (1.1) 蕴含了连续统假设的相对一致性.

但我们不可能再用内模型的方法来证明， $\neg$CH 的相对一致性. 因为，假设我们在 ZFC 下工作，我们为此必须构造 ZFC+$\mathbf{V}\neq\mathbf{L}$ 的内模型 $\mathbf{M}$. 由于 $\mathbf{L}$ 是最小的内模型，我们有 $\mathbf{L}\subseteq\mathbf{M}$. 但 $\mathbf{L}\vDash(\mathbf{V}=\mathbf{L})$ 而 $\mathbf{M}\nvDash(\mathbf{V}=\mathbf{L})$. 故 $\mathbf{L}\subsetneq\mathbf{M}$. 也就是说，我们在 ZFC 下证明了 $\mathbf{V}\neq\mathbf{L}$. 如果 ZF 一致，根据 (1.1)，这是不可能的.

因此，假设 $\mathbf{V}$ 或 M 是 ZFC 的类模型 / 集合模型，称作基础模型 (ground model)，我们只能希望扩张基础模型以得到一个更“大”的 ZFC 的模型 $\mathbf{V}[G]\supseteq\mathbf{V}$ 或 $M[G]\supseteq M$. 我们把将要构造的模型称作基础模型的拓殊扩张 (generic extension). 这就是科恩 (Paul J. Cohen) 在 1962 年发明的力迫法 (科恩的原始工作参见 Cohen [1964]).

我们接下来的作业都应被视作是在 ZFC 公理的框架下进行的. 文中将会涉及到一些集合论的基本概念，例如：递归定义、归纳证明、序数、有序对的典范序、相对化、绝对性、偏序、布尔代数、稠密、反链等. 读者可在 Jech [2002] 和 Kunen [1980] 中查找相关定义和定理.

二、拓殊模型与力迫关系

力迫法的现代表述中，构造拓殊扩张 $M[G]$ 与力迫关系的方式有两种，一种是利用布尔代数的方法，一种是直接利用偏序来构造. 前者更直观，而后者更直接，对于对力迫法的更进一步的推广运用也更为便捷. 在本文中，作者将以偏序的路径为主线，穿插介绍布尔代数方式的对应定义、定理以帮助理解. [1]

现在，我们假设 ZFC 一致. 注意， ZFC 是一个可数一阶语言 (只含一个 $\in$ 谓词)下的理论. 由哥德尔完全性定理和向下的 LST 定理[Enderton, 2006, 151]，我们可以假设 M 是 ZFC 的可数模型. 又由 Mostowsky 坍塌定理[Jech, 2002, 69]，我们可以假设 M 是传递的 (transitive). 下文中，若无特别说明， M 指 ZFC 的一个可数传递模型. 这也就是我们的基础模型. 由此，我们将构造 M 上的拓殊模型 $M[G]$ 以及力迫关系 $\Vdash$，并使其满足下述定理.

定理 2.1 *M 是 ZFC 的可数传递模型， $\mathbb{P}$ 是 M 中偏序， G 是 $\mathbb{P}$ 上 (相对于 M) 的拓殊滤. 则存在 M 的拓殊扩张 $M[G]$，满足:*

(i) *$M[G]$ 是 ZFC 的传递模型;*

(ii) *$M\subseteq M[G]$ 且 $G\in M[G]$;*

(iii) *$M[G]$ 是满足 (i)、(ii) 的最小模型.*

[3]参见 Kunen [1980]

[1]以下带星号的定义、引理和定理为布尔代数方式所涉及的定义、证明，或为说明布尔代数方式与偏序方式之间关系的所作的证明. 读者可选择略过这些内容. 通过基础模型中任意偏序来引入拓殊扩张和力迫关系的方法见于 Kunen [1980]，利用完全布尔代数的叙述方式可参考 Jech [2002].

定理 2.2 假设定理 2.1 的前提，$M[G]$ 是拓殊扩张，给定公式 $\varphi(v_1,\dots,v_n)$ (所有自由变元已列出) 和 $\tau_1,\dots,\tau_n \in M^{\mathbb{P}}$，则

$$\varphi(\tau_1^G,\dots,\tau_n^G)^{M[G]}，当且仅当\ \exists p \in G(p \Vdash \varphi(\tau_1,\dots,\tau_n))^M.$$

我们将逐一定义上述定理中出现的拓殊滤、 $M[G]$、 $M^{\mathbb{P}}$、 τ^G 等术语，并在本节末证明上述两个定理.

任意给定 $(\mathbb{P},\le) \in M$ 是 M 中的偏序. 由于 M 是传递的， $\mathbb{P},\le$ 以及任意 $p \in \mathbb{P}$ 都在 M 中. 为了直观，我们把 $\mathbb{P}$ 中元素称作条件 (condition). 对 $p,q \in \mathbb{P}$，若 $p \le q$，我们称条件 p 比 q 强；若 $p \perp q$，即不存在 $r \in \mathbb{P}$ 满足 $r \le p$ 且 $r \le q$，则称条件 p 与 q 不相容或不能同真.

定义 2.3 若 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是偏序 $\mathbb{P}$ 上的滤，则称 G 是 $\mathbb{P}$ 上相对于 M 的拓殊滤 (generic filter)[1]，当且仅当对任意 $D \in M$，若 D 是 $\mathbb{P}$ 的稠密子集，那么 $G \cap D \neq \emptyset$.

严格来说，我们对于用来力迫的条件集，即偏序 $\mathbb{P}$ 没有任何额外要求. 但在力迫法的实际运用中，偏序集 $\mathbb{P}$ 都满足如下性质：

$$\text{对任意 } p \in \mathbb{P}，\text{存在 } q \le p, r \le p，\text{满足 } q \perp r. \tag{2.1}$$

定理 2.4 $\mathbb{P} \in M$ 是偏序. $\mathbb{P}$ 满足 (2.1)，当且仅当任意 $\mathbb{P}$ 上拓殊滤 $G \notin M$.

证明 假设 $\mathbb{P}$ 满足 (2.1). 任给拓殊滤 $G \subseteq \mathbb{P}$. 反设 $G \in M$. 由集合减运算绝对， $D = \mathbb{P} \setminus G \in M$. 任给 $p \in \mathbb{P}$. 若 $p \in G$，由 (2.1)，存在 $q, r \le p$ 且 $q \perp r$. 由于 G 是滤，不可能两者都属于 G，即或者 $q \in D$，或者 $r \in D$. 故 D 稠密. 而 $G \cap D = \emptyset$. 矛盾.

反过来，假设 $\mathbb{P}$ 不满足 (2.1)，即存在 $p \in \mathbb{P}$ 使对任意 $q, r \le p$， q 与 r 相容. 令 $G = \{r \in \mathbb{P} \mid \exists q \in \mathbb{P}(q \le p \wedge r \ge q)\}$. 显然， G 是拓殊滤. 而由绝对性， $G \in M$. □

因此，对于不满足 (2.1) 的偏序，存在其上拓殊滤 $G \in M$. 又根据定理 2.1，由此生成的拓殊模型 $M[G] = M$，将没有意义.

现在，我们停下来看看布尔代数的处理方式. 这有助于我们理解条件集 $\mathbb{P}$ 的直观意义.

给定任意完全布尔代数 $(\mathbb{B},\le) \in M$. 我们称 $\mathbb{B}$ 中元素 u,v,w 为真值. 请回忆，在一般的语义解释中，我们取平凡布尔代数 $\{0,1\}$ 作为真值的取值范围. 对于 $u,v \in \mathbb{B}$，$u \le v$ 可直观地理解为“v 比 u 更真”；类似地 $u \cdot v = 0$ 表示两者不相容.

***定义 2.5** H 是布尔代数 $\mathbb{B}$ 上相对于 M 的拓殊超滤 (generic ultrafilter)，当且仅当 H 是 $\mathbb{B}$ 上超滤且对任意 $X \in M$， $X \subseteq H$，有 $\prod X \in H$.

直观上，布尔代数 $\mathbb{B}$ 上的拓殊超滤 H 将真值集 $\mathbb{B}$ 分成两半，上半为真，下半为假 (参见，图 2.1). 下述定理揭示了完全布尔代数上拓殊超滤与偏序上拓殊滤的关系.

[1]下文中，如非特别说明，说 G 是拓殊滤，一般指 G 是 $\mathbb{P}$ 上相对于 M 的拓殊滤

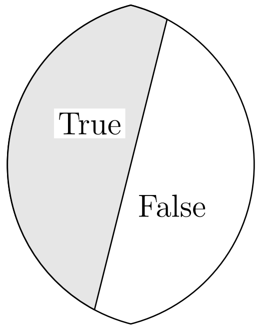

图 2.1: 布尔代数和超滤

***定理 2.6** 给定完全布尔代数 B，$G \subseteq \mathbb{B}$. 是 H 是 $\mathbb{B}$ 上拓殊超滤，当且仅当 H 是偏序 $\mathbb{B}^+$ 上拓殊滤.

随着本节主要定义的逐步引入，我们还将证明，利用偏序 $\mathbb{P}$ 及其上拓殊滤 G 与通过完全布尔代数 $\mathbb{B}$ 及其上拓殊超滤 H 所作的力迫没有本质区别. 下面，我们首先在任意偏序集与完全布尔代数之间建立一个对应.

***定义 2.7** 偏序 $\mathbb{P}$ 是可分的，当且仅当对任意 $p, q \in \mathbb{P}$，若 $p \not\leq q$，则存在 $r \leq p$ 且 $r \perp q$.

***定理 2.8** 如果 $(\mathbb{P}, <)$ 是可分偏序，那么存在唯一 (在同构的意义上) 完全布尔代数 $\mathbb{B}$ 使 $(\mathbb{P}, <)$ 是 $(\mathbb{B}^+, <)$ 的子结构，且 $\mathbb{P}$ 在 $\mathbb{B}$ 中稠密.

证明 我们称 $U \subseteq \mathbb{P}$ 是一个分割 (cut)，当且仅当对任意 $p \in \mathbb{P}$ 若存在 $q \in U$ 且 $p \leq q$，则 $p \in U$. 对任意 $p \in \mathbb{P}$，$U_p = \{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p\}$ 是一个分割.

我们称一个分割 U 是正则的 (regular)，当且仅当对任意 $p \notin U$，存在 $q \leq p$ 使得 $U \cap U_q = \emptyset$.

对任意 $p \in \mathbb{P}$，若 $q \notin U_p$，即 $q \not\leq p$，由 $\mathbb{P}$ 可分，存在 $r \leq q$ 使 r 与 p 不相容，即$U_r \cap U_p = \emptyset$. 故 U_p 是正则的.

对任意分割 U，我们定义 $\overline{U} = \{p \in \mathbb{P} : (\forall q \leq p) U \cap U_q \neq \emptyset\}$. 可以证明，$\overline{U}$ 是包含的 U 的最小正则分割 (参见图 2.2).

定义 B 为 $\mathbb{P}$ 上所有正则分割的集合. 首先证明 $(B, \subseteq)$ 是一个完全布尔代数.

对 $u, v \in B$，定义

$$u \cdot v = u \cap v, \quad u + v = \overline{u \cup v}, \quad -u = \{p : U_p \cap u = \emptyset\}.$$

容易验证，$(u \cdot v), (u + v), (-u)$ 都是正则分割. 例如，若 u 是正则分割，那么对任意 $p \notin -u$，即 $U_p \cap u \neq \emptyset$，可以取 $q \in U_p \cap u$. 则 $q \leq p$ 且 $U_q \cap -u = \emptyset$. 因为对任意 $r \in U_q$，$r \leq q \in U_p \cap u$，故 $r \in U_r \cap u \neq \emptyset$. 因而 $-u$ 正则. 也容易验证，$u \cdot v$ 是 u 与 v 的下确届（相对于 $\subseteq$）；$u + v$ 是 u 与 v 的上确界；而 u 与 $-u$ 的上确界是 $\mathbb{P}$，下确界是 $\emptyset$. 故 $(B, \subseteq)$ 是一个布尔代数.

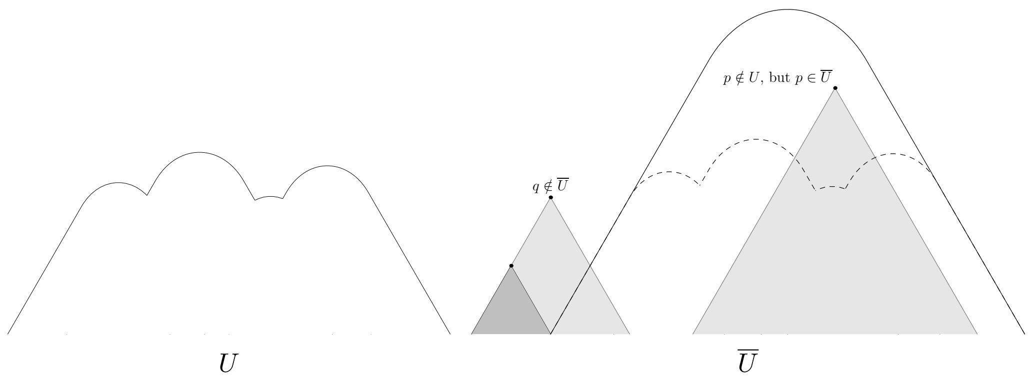

图 2.2: $U \mapsto \overline{U}$

对 $X \subseteq B$，定义 $\prod X = \bigcap X$， $\sum X = \overline{\bigcup X}$．也容易证明， $\prod X$ 与 $\sum X$ 都是正则分割且分别是 X 的下确界与上确界．因此 B 是完全布尔代数．

定义 $\mathbb{P}$ 到 B 的映射： $p \mapsto U_p$．显然， $p \leq q$，当且仅当 $U_p \subseteq U_q$．而对 $p \not\leq q$，由 $\mathbb{P}$ 可分，存在 $r \leq p$ 而 $r \not\leq q$，故 $U_p \neq U_q$．故该映射是一一嵌入．

最后，我们证 $\{U_p \mid p \in \mathbb{P}\}$ 在 B 中稠密．对任意 $U \in B^+$，即 U 是非空正则分割，取 $p \in U$，则 $U_p \subseteq U$．

取 $\mathbb{B}$ 为上述嵌入的逆的一一扩张的相．

欲证明唯一性，假设 $\mathbb{B}$ 与 $\mathbb{C}$ 都是满足上述条件的完全布尔代数．定义 $f : \mathbb{B} \mapsto \mathbb{C}$，使对任意 $u \in \mathbb{B}$，

$$f(u) = \sum^{\mathbb{C}} \{p \in \mathbb{P} \mid p \leq u\}.$$

可以验证， f 是 $\mathbb{B}$ 到 C 的同构． □

以上，我们证明了可以把可分的偏序，稠密地嵌入到唯一的 (同构意义上) 完全布尔代数中。事实上，我们可以在任意偏序与完全布尔代数之间建立对应．

***定理 2.9** 对任意偏序 $(\mathbb{P}, \leq)$，存在可区分的偏序 $(\mathbb{Q}, \preceq)$ 以及满射 $h : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{Q}$ 满足，

(i) 若 $x \leq y$，则 $h(x) \preceq h(y)$；

(ii) 对任意 $x, y \in \mathbb{P}$， x 与 y 相容，当且仅当 $h(x)$ 与 $h(y)$ 相容．

证明的想法：对 $p, q \in \mathbb{P}$，若存在 $p \neq q$ 且 p 与 q 不可分，即不存在 $r \leq p$ 使 $r \perp q$ 或 $r \leq q$ 使 $r \perp p$ (见图 2.3)．我们不妨把 p, q 看作同一个条件，即建立等价关系：

$$p \sim q, \text{ 当且仅当 } \forall r (r \text{ 与 } p \text{ 相容 } \leftrightarrow r \text{ 与 } q \text{ 相容}).$$

令 $\mathbb{Q} = \{[p] \mid p \in \mathbb{P}\} = \mathbb{P}/\sim$．容易验证， $\mathbb{Q}$ 和映射 $h(x) = [x]$ 满足 (i)、(ii)．

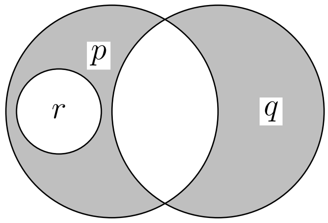

图 2.3: 用 r 区分 p, q

我们证明简化偏序 $\mathbb{P}$，取它的 $\sim$ 商集是无害的，即等价的条件力迫相同的东西.

***定理 2.10** 任给 $p, q \in \mathbb{P}$，若 $p \sim q$，则对任意 $D \subseteq \mathbb{P}$， D 在 p 下稠密，当且仅当 D 在 q 下稠密.

证明 假设 $p \sim q$. 给定 D 在 p 下稠密，即对任意 $r \leq p$，存在 $s \in D$，使 $s \leq r$. 现任取 $t \leq q$，因而 t 与 q 相容. 由 $p \sim q$， t 也与 p 相容，即存在 $r \leq p$ 且 $r \leq t \leq q$. 由， p 稠密，故存在 $s \in D$，使 $s \leq r \leq q$. 因而 D 也在 q 下稠密. $\square$

结合后文中关于力迫关系的定义 2.23，不难验证，如果 $p \sim q$，则 $p \Vdash \varphi$ 当且仅当 $q \Vdash \varphi$.

结合定理 2.8 和 2.9，容易得到下述推论.

***推论 2.11** 对任意偏序 $\mathbb{P}$，存在唯一完全布尔代数 $\mathbb{B}$ 以及映射 $e : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{B}^+$ 使得

(i) $p \leq q$ 蕴含 $e(p) \leq e(q)$；

(ii) p 与 q 相容，当且仅当 $e(p) \cdot e(q) \neq 0$；

(iii) $\{e(p) \mid p \in \mathbb{P}\}$ 在 $\mathbb{B}^+$ 中稠密.

检查从 $\mathbb{P}$ 到 $\mathbb{P}/\sim$，再到由 $\mathbb{P}/\sim$ 正则分割组成的 $\mathbb{B}$，根据绝对性，可以证明若 $\mathbb{P} \in M$，则 $\mathbb{B} \in M$.

我们回到的主要任务，定义拓殊扩张 $M[G]$ 和力迫关系. 力迫法的直观想法是，生活在 M 中的人们能想象另一种更大的可能世界 $M[G]$. 为此，M 中的人们要有一种语言来叙述那种可能的世界，即*力迫语言* (forcing language). 我们定义 M 中人们用来指称 $M[G]$ 中对象的专名 ($\mathbb{P}$-名) 的集合 $M^{\mathbb{P}}$：

定义 2.12 *τ 是 $\mathbb{P}$-名，当且仅当 τ 是关系，且对任意 $(\pi, p) \in \tau$， π 是 $\mathbb{P}$-名且 $p \in \mathbb{P}$.*

注意，上述定义应理解为递归定义，而并非循环定义. 其严格的定义应是先递归定义运算：

$$\mathbf{H}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } \tau \text{ 是关系，对任意 } (\pi, p) \in \tau，\ \mathbf{H}(\pi) = 1 \text{ 且 } p \in \mathbb{P}, \\ 0 & \text{否则.} \end{cases}$$

而 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}} = \{\tau \mid H(\tau) = 1\}$．注意，检查上述定义可知，$\mathbb{P}$-名对于 ZFC 传递模型 M 是绝对概念．因此 $M^{\mathbb{P}} = (\mathbf{V}^{\mathbb{P}})^M = \mathbf{V}^{\mathbb{P}} \cap M$．

相应地，利用布尔代数，我们定义 $\mathbb{B}$-名 (同样是递归定义．为增进理解，我们使用另一中定义方式)．

***定义 2.13**

$$\begin{array}{lcl} V_0^{\mathbb{B}} & = & \emptyset, \\ V_{\alpha+1}^{\mathbb{B}} & = & \{\dot{x} \subseteq V_\alpha^{\mathbb{B}} \times \mathbb{B} \mid \dot{x} \text{ 是函数}\}, \\ V_\alpha^{\mathbb{B}} & = & \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{\mathbb{B}} \quad (\text{若 } \alpha \text{ 是极限序数}), \\ \mathbf{V}^{\mathbb{B}} & = & \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha^{\mathbb{B}}. \end{array}$$

对 M 中序数 α，定义 $M_\alpha^{\mathbb{B}} = (V_\alpha^{\mathbb{B}})^M$． $M^{\mathbb{B}} = (\mathbf{V}^{\mathbb{B}})^M$．

类似地，我们也可以定义 $V_0^{\mathbb{P}} = \emptyset$，$V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} = P(V_\alpha^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P})$， $V_\alpha^{\mathbb{P}} = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{\mathbb{P}}$ (α 极限)，而 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}} = \bigcup_{\alpha\in Ord} V_\alpha^{\mathbb{P}}$．容易验证，这与前述定义一致．类似对 $\mathbf{V}$ 的分层．我们也可以对 $\mathbb{P}$-名分层．

定义 2.14 $\operatorname{rank}(\tau) =$ 最小的 α 使 $\tau \in V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}}$．

容易证明，对 $\mathbb{P}$-名 τ, π，若 $\pi \in \operatorname{dom}\tau$，则 $\operatorname{rank}(\pi) < \operatorname{rank}(\tau)$．

我们可以定义 $\mathbb{P}$-名与 $\mathbb{B}$-名之间的对应

***定义 2.15** (i) τ 是 $\mathbb{P}$-名，

$$\tau^{\mathbb{B}} = \left\{(\pi^{\mathbb{B}}, u) \;\middle|\; \pi \in \operatorname{dom}\tau \text{ and } u = \sum \{e(p) \mid (\pi, p) \in \tau\}\right\}.$$

(ii) $\dot{x}$ 是 $\mathbb{B}$-名，

$$\dot{x}^{\mathbb{P}} = \{(\dot{y}^{\mathbb{P}}, p) \mid (\exists u)(\dot{y}, u) \in \dot{x} \text{ and } e(p) \le u\}.$$

容易验证，若 τ 是 $\mathbb{P}$-名，则 $\tau^{\mathbb{B}}$ 是 $\mathbb{B}$-名；若 $\dot{x}$ 是 $\mathbb{B}$-名，则 $\dot{x}^{\mathbb{P}}$ 是 $\mathbb{P}$-名．

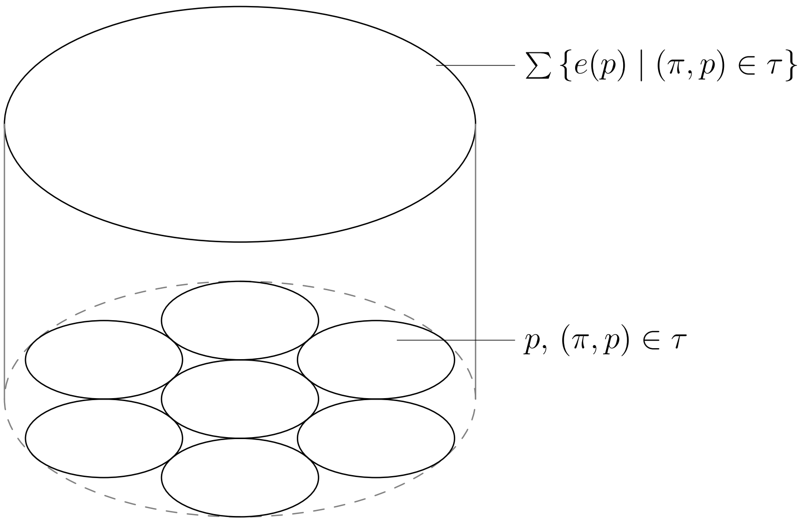

图 2.4: $\mathbb{P}$-名到 $\mathbb{B}$-名

$M, \mathbb{P}$ 的力迫语言指含有一个谓词符号 $\in$ 且把所有 M 中 $\mathbb{P}$-名作为常元符号的一阶语言 $(\in, \tau)_{\tau \in M^{\mathbb{P}}}$．相应地，用布尔代数方式定义的力迫语言是 $(\in, \dot{x})_{\dot{x} \in M^{\mathbb{B}}}$．

定义 2.16 τ 是 $\mathbb{P}$-名， G 是拓殊滤．令

$$\tau^G = \{\pi^G \mid (\exists p \in G)(\pi, p) \in \tau\}.$$

定义拓殊扩张

$$M[G] = \{\tau^G \mid \tau \in M^{\mathbb{P}}\}.$$

注意， τ^G 的定义也是递归的．类似地

***定义 2.17** $\dot{x}$ 是 $\mathbb{B}$-名， H 是拓殊超滤．定义

$$\dot{x}^H = \{\dot{y}^H \mid \dot{x}(\dot{y}) \in H\}.$$

$$M[H] = \{\dot{x}^H \mid \dot{x} \in M^{\mathbb{B}}\}.$$

***定理 2.18** M 是基础模型， $\mathbb{P}$ 是 M 中偏序， G 是 $\mathbb{P}$ 的拓殊滤．则存在 M 中完全布尔代数 $\mathbb{B}$， $\mathbb{B}$ 上拓殊超滤 H，使 $M[G] = M[H]$.

证明　由推论 2.11(在 M 中使用)，存在 $\mathbb{B} \in M$， $\mathbb{B}$ 是 M 中完全布尔代数[1]，以及映射 $e : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{B}^+$ 满足

(i) $p \leq q$ 蕴含 $e(p) \leq e(q)$；

(ii) p 与 q 相容，当且仅当 $e(p) \cdot e(q) \neq 0$；

(iii) $\{e(p) \mid p \in \mathbb{P}\}$ 在 $\mathbb{B}^+$ 中稠密．

令

$$H = \{u \in \mathbb{B} \mid (\exists p \in G) e(p) \leq u\}.$$

我们证明 H 是拓殊超滤．

由定义，对任意 $u \in H$，存在 $q \in G$， $e(q) \leq u$．若 $u \leq v$，则 $e(q) \leq v$，故 $v \in H$．又，对任意 $u, v \in H$，存在 $p, q \in G$ 满足 $e(p) \leq u$ 且 $e(q) \leq v$．由 G 是滤，存在 $r \in G$ 满足 $r \leq p, q$，因而 $e(r) \leq e(p) \cdot e(q) \leq u \cdot v$．故 $u \cdot v \in H$．因此 H 是滤．

对任意 $u \in \mathbb{B}$．考虑

$$D = \{p \in \mathbb{P} \mid e(p) \leq u\} \cup \{p \in \mathbb{P} \mid e(p) \leq -u\}.$$

由 $e \in M$，易证 $D \in M$．我们证明， D 在 $\mathbb{P}$ 中稠密．任给 $p \in \mathbb{P}$．$e(p) \cdot u \neq 0$ 或 $e(p) \cdot -u \neq 0$．不妨设前者．由 $e[\mathbb{P}]$ 在 $\mathbb{B}^+$ 中稠密，存在 $q \in \mathbb{P}$，有 $e(q) \leq e(p) \cdot u$．[2]则 $e(q) \cdot e(p) = e(q) \neq 0$．又由 (ii)，存在 $r \in \mathbb{P}$，有 $r \leq p, q$．再由 (i)， $e(r) \leq e(q) \leq u$．因此， D 稠密．则 $G \cap D \neq \emptyset$．即存在 $p \in D$，要么 $p \leq u$，要么 $p \leq -u$．因而，要么 $u \in H$，要么 $-u \in H$．因此， H 是超滤．

任给 $X \in M$， $X \subseteq H$．我们希望证明， $\prod X \in H$．

[1]注意，“是布尔代数”是绝对的．但 $(\mathbb{B}\ \text{完全})^M$ 不一定保证 $\mathbb{B}$ 完全，不过可以保证对任意 $X \in M$，若 $X \subseteq \mathbb{B}$，则 $\sum X, \prod X \in \mathbb{B}$.

[2]注意，由于 (i) 的反方向不成立，这里不能直接得到 $q \leq p$

令

$$D_1 = \{q \in \mathbb{P} \mid (\forall u \in X) e(q) \le u\};$$
$$D_2 = \{q \in \mathbb{P} \mid (\exists u \in X) e(q) \cdot u = 0\}.$$

由 X, e 及绝对性，易证 $D_1 \cup D_2 \in M$．我们证，$D_1 \cup D_2$ 在 $\mathbb{P}$ 中稠密．任给 $p \in \mathbb{P}$．若 $p \notin D_1$，即存在 $u \in X$ 使 $e(p) \not\le u$，即 $e(p) - u \neq 0$．由 $e[\mathbb{P}]$ 在 $\mathbb{B}^+$ 中稠密，存在 q 使 $e(q) \le e(p) - u$．类似地，再由 (i), (ii)，存在 $r \in \mathbb{P}$ 满足 $e(r) \le e(q) \le -u$，因而 $r \in D_2$，并且 $r \le p$．因此，$D_1 \cup D_2$ 在 $\mathbb{P}$ 中稠密．故 $G \cap (D_1 \cup D_2) \neq \emptyset$.

然而，$G \cap D_2 = \emptyset$．因为，对任意 $p \in G$，任意 $u \in X \subseteq H$，有 $q \in G$ 使 $e(q) \le u$．p, q 相容，由 (ii)，$e(p) \cdot u \ge e(p) \cdot e(q) > 0$．因此，存在 $s \in G \cap D_1$．显然，$e(s)$ 是 X 的下界．故 $e(s) \le \prod X$，因而 $\prod X \in H$.

我们证明了，H 是 $\mathbb{B}$ 上拓殊超滤．最后，我们证明，$M[G] = M[H]$.

我们 $\mathbb{P}$-名 τ 归纳证明，$\tau^G = (\tau^{\mathbb{B}})^H$.

对任意 $\pi^G \in \tau^G$，存在 $p \in G$，使 $(\pi, p) \in \tau$．由定义 2.15，有 $(\pi^{\mathbb{B}}, u) \in \tau^{\mathbb{B}}$，且 $e(p) \le u$，故 $u \in H$．因而，$(\pi^{\mathbb{B}})^H \in (\tau^{\mathbb{B}})^H$．而由归纳假设，$(\pi^{\mathbb{B}})^H = \pi^G$.

反之，假设 $(\pi^{\mathbb{B}})^H \in (\tau^{\mathbb{B}})^H = \{(\pi^{\mathbb{B}})^H \mid \tau^{\mathbb{B}}(\pi^{\mathbb{B}}) \in H\}$．故 $\sum\{e(p) \mid (\pi, p) \in \tau\} = \tau^{\mathbb{B}}(\pi^{\mathbb{B}}) \in H$．则必定存在 $p \in \mathbb{P}$ 使 $(\pi, p) \in \tau$ 且 $e(p) \in H$．否则，由 H 是超滤，对任意 $(\pi, p) \in \tau$，$-e(p) \in H$．由 H 是拓殊超滤，$\prod\{-e(p) \mid (\pi, p) \in \tau\} \in H$．矛盾．因此，存在 $p \in G$，$(\pi, p) \in \tau$．故 $\pi^G \in \tau^G$．而由归纳假设，$(\pi^{\mathbb{B}})^H = \pi^G$.

类似可以证明，对任意 $\mathbb{B}$ 名 $\dot{x}$，$\dot{x}^H = (\dot{x}^{\mathbb{P}})^G$. □

引理 2.19 $M[G]$ 传递.

证明 任给 $x \in M[G]$．$x = \tau^G = \{\pi^G \mid \exists p \in G((\pi, p) \in \tau)\}$，而 $\tau \in M^{\mathbb{P}}$-名．由 $M^{\mathbb{P}}$ 定义，对任 $(\pi, p) \in \tau$，$\pi \in M^{\mathbb{P}}$，故 $\pi^G \in M[G]$. □

接下来，我们仍用递归方式来定义基础模型中集合的典范名.

定义 2.20 对任意 x，定义 $\check{x} = \{(\check{y}, p) \mid y \in x, p \in \mathbb{P}\}$.

显然，对任意 x，$\check{x}$ 是 $\mathbb{P}$-名．通过归纳，容易证明，$\check{x}^G = x$．因此 $M \subseteq M[G]$.

我们定义拓殊滤的典范名：

定义 2.21 $\check{G} = \{(\check{p}, p) \mid p \in \mathbb{P}\}$.

注意，$\check{G}$ 其实不依赖于具体的拓殊滤 G 且 $\check{G} \in M$．$\check{G}$ 是 M 中的人们用来指称 G 的名字，但生活在 M 中的人并不知道 G 到底是什么．事实上，G 是 M 中人们完全认识 $M[G]$ 所缺的唯一信息．通过 G，所有 $\mathbb{P}$-名都得到明确的解释 (定义 2.16)，包括 G 自身：

$$\check{G}^G = G \in M[G].$$

相应地，借用布尔代数定义的典范名：

***定义 2.22**

$$\ddot{x} = \{(\ddot{y}, 1) \mid y \in x\}.$$

$$\ddot{H} = \{(\ddot{u}, u) \mid u \in \mathbb{B}\}.$$

下面是本节中最后一个定义——条件与力迫语言公式之间的力迫关系 ($\Vdash$).

定义 2.23 (i) (a) $p \Vdash \tau_1 \subseteq \tau_2$，当且仅当对任意 $(\pi, r) \in \tau_1$，集合 $\{q \leq p \mid q \leq r \to q \Vdash \pi \in \tau_2\}$ 在 p 之下稠密.
$p \Vdash \tau_1 = \tau_2$，当且仅当 $p \Vdash \tau_1 \subseteq \tau_2$ 且 $p \Vdash \tau_2 \subseteq \tau_1$.

(b) $p \Vdash \tau_1 \in \tau_2$，当且仅当集合 $\{q \leq p \mid \exists(\pi, r) \in \tau_2 (q \leq r \wedge q \Vdash \pi = \tau_1)\}$ 在 p 之下稠密.

(ii) $p \Vdash \varphi \wedge \psi$，当且仅当 $p \Vdash \varphi$ 且 $p \Vdash \psi$.

(iii) $p \Vdash \neg\varphi$，当且仅当对任意 $q \leq p$，并非 $q \Vdash \varphi$.

(iv) $p \Vdash \exists x \varphi(x)$，当且仅当集合 $\{q \in \mathbb{P} \mid \exists\pi(\pi \text{ 是 } \mathbb{P}\text{-名 } \wedge q \Vdash \varphi(\pi))\}$ 在 p 之下稠密.

上述定义中，(i) 中的 (a)、(b) 是基于 $(\operatorname{rank}(\tau_1), \operatorname{rank}(\tau_2))$ 的典范序的递归定义．该部分，即条件与原子公式的力迫关系，在 M 下是绝对的．而整个定义，即 (i)-(iv)，应被视为基于公式复杂度的递归定义．请注意 (iv) 子句中的无界量词 $\exists\pi$，所以一般地力迫关系不是绝对的．即 $(p \Vdash \varphi)^M$ 一般不等价于 $p \Vdash \varphi$.

我们再来看一下基于布尔代数的力迫关系定义.

***定义 2.24** 定义力迫公式 $\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ 的布尔代数语义：

(i) (a) $\|\dot{x} \subseteq \dot{y}\| = \prod_{\dot{z} \in \operatorname{dom} \dot{x}} \big(-\dot{x}(\dot{z}) + \|\dot{z} \in \dot{y}\|\big)$,
$\|\dot{x} = \dot{y}\| = \|\dot{x} \subseteq \dot{u}\| \cdot \|\dot{y} \subseteq \dot{x}\|$;

(b) $\|\dot{x} \in \dot{y}\| = \sum_{\dot{z} \in \operatorname{dom} \dot{y}} \big(\|\dot{x} = \dot{z}\| \cdot \dot{y}(\dot{z})\big)$.

(ii) $\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$.

(iii) $\|\neg\varphi\| = -\|\varphi\|$.

(iv) $\|\exists x \varphi(x)\| = \sum_{\dot{x} \in \mathbf{V}^{\mathbb{B}}} \|\varphi(\dot{x})\|$.[1]

根据定义，容易归纳证明：

***定理 2.25** 给定公式 $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$， $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$， $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in \mathbf{V}^{\mathbb{B}}$ 以及 $p \in \mathbb{P}$

(i) $p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$，当且仅当 $e(p) \leq \|\varphi(\tau_1^{\mathbb{B}}, \ldots, \tau_n^{\mathbb{B}})\|$.

(ii) $p \Vdash \varphi(\dot{x}_1^{\mathbb{P}}, \ldots, \dot{x}_n^{\mathbb{P}})$，当且仅当 $e(p) \leq \|\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)\|$.

[1]类似力迫关系，该定义子句使 $\|\varphi\|$ 一般不是绝对的．它在 M 中的相对化，等价于使最后的定义子句变为： $\|\exists x \varphi(x)\|^M = \sum_{\dot{x} \in M^{\mathbb{B}}} \|\varphi(\dot{x})\|$.

力迫关系可理解为 M 中的人[1]所掌握的关于 $M[G]$ 的一般知识的体系．即如果 p 力迫 φ，那么无论 $M[G]$ 到底是什么 (无论取什么 G)，若条件 p 真 ($p \in G$)，则 φ 也真 ($\varphi^{M[G]}$)．这正是定理 2.2 所表达的，我们现在证明它．

首先，我们介绍力迫关系的一些性质．

引理 2.26 (i) *若 $p \leq q$，则 $q \Vdash \varphi$ 蕴含 $p \Vdash \varphi$.*

(ii) *对任意 $p \in \mathbb{P}$，存在 $q \leq p$，$q \Vdash \varphi$ 或 $q \Vdash \neg\varphi$.*

(iii) *不存在条件 p 有 $p \Vdash \varphi$ 且 $p \Vdash \neg\varphi$.*

根据定义，不难验证上述引理．以下，证明定理 2.2.

证明　给定公式 $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ 和 $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$.

首先证明 φ 是原子公式的情况．我们对 $(\mathrm{rank}(\tau_1), \mathrm{rank}(\tau_2))$ 归纳．

若 φ 是 $v_1 = v_2$.

假设 $(\tau_1^G = \tau_2^G)^{M[G]}$．由绝对性，$\tau_1^G = \tau_2^G$，因而 $\tau_1^G \subseteq \tau_2^G$．考虑集合

$$
\begin{aligned}
(2.2)\quad D = \Big\{p \in \mathbb{P} \;\Big|\; & p \Vdash \tau_1 \subseteq \tau_2 \\
& \vee \exists(\pi, s) \in \tau_1 \big(p \leq s \wedge \forall q \in \mathbb{P}(q \Vdash \pi \in \tau_2 \to q \perp p)\big)\Big\}.
\end{aligned}
$$

我们证明，D 是稠密的．给定 $p \in \mathbb{P}$，若 $p \nVdash \tau_1 \subseteq \tau_2$，即存在 $(\pi, s) \in \tau_1$，使 $\big\{r \leq p \;\big|\; r \leq s \to r \Vdash \pi \in \tau_2\big\}$ 在 p 之下不稠密．即，存在 $q \leq p$，对任意 $r \leq q$ 有，$r \leq s$ 且 $r \nVdash \pi \in \tau_2$．我们证明，$q \in D$．显然，$q \leq q$ 故 $q \leq s$．对任意 $t \in \mathbb{P}$，若 $t \Vdash \pi \in \tau_2$，必有 $t \perp q$．否则，存在 $r \leq q$ 且 $r \leq t$，由引理2.26，$r \Vdash \pi \in \tau_2$．矛盾．

因此，$G \cap D \neq \emptyset$．我们只需再证明对任意 $p \in G$，

$$\neg\exists(\pi, s) \in \tau_1 \big(p \leq s \wedge \forall q \in \mathbb{P}(q \Vdash \pi \in \tau_2 \to q \perp p)\big).$$

任给 $(\pi, s) \in \tau_1$．若 $p \leq s$，则 $s \in G$．故 $\pi^G \in \tau_1^G$，因而 $\pi^G \in \tau_2^G$．由归纳假设，存在 $q \in G$ 有 $q \Vdash \pi \in \tau_2$．$q, p \in G$，故 q 与 p 相容．

因此，存在 $p \in G$ 有 $p \Vdash \tau_1 \subseteq \tau_2$．同理，也存在 $q \in G$ 有 $q \Vdash \tau_2 \subseteq \tau_1$．存在 $r \in G$ 有 $r \leq p$ 且 $r \leq q$．由引理 2.26，$r \Vdash \tau_1 \subseteq \tau_2$ 且 $r \Vdash \tau_2 \subseteq \tau_1$，因而，$r \Vdash \tau_1 = \tau_2$．由力迫关系在原子公式情况下的绝对性，$(r \Vdash \tau_1 = \tau_2)^M$.

反过来，假设 $p \in G$ 且 $(p \Vdash \tau_1 = \tau_2)^M$．由绝对性，$p \Vdash \tau_1 = \tau_2$．由定义，$p \Vdash \tau_1 \subseteq \tau_2$．欲证 $\tau_1^G \subseteq \tau_2^G$.

任给 $\pi^G \in \tau_1^G$，即有 $(\pi, s) \in \tau_1$，且 $s \in G$．取 $r \in G$ 使 $r \leq p$ 且 $r \leq s$．由定义，集合 $D_{\pi,s} = \big\{t \leq p \;\big|\; t \leq s \to t \Vdash \pi \in \tau_2\big\}$ 在 p 之下稠密，因而也在 r 之下稠密．又由 $r \in G$，故存在 $t \leq r$ 且 $t \in G \cap D_{\pi,s}$．显然，$t \in G$ 且 $t \Vdash \pi \in \tau_2$．故 $\pi^G \in \tau_2^G$.

同理可证，$\tau_2^G \subseteq \tau_1^G$．因而 $\tau_1^G = \tau_2^G$，由绝对性，$(\tau_1^G = \tau_2^G)^{M[G]}$.

若 φ 是 $v_1 \in v_2$.

[1]所以，我们一般用力迫关系在 M 下的相对化，即 $(p \Vdash \varphi)^M$.

假设 $(\tau_1^G \in \tau_2^G)^{M[G]}$．由绝对性，$\tau_1^G \in \tau_2^G = \{\pi^G \mid \exists s \in G(\pi, s) \in \tau_2\}$．取 $(\pi, s) \in \tau_2$，使 $s \in G$ 且 $\pi^G = \tau_1^G$．由归纳假设，存在 $r \in G$ 有 $r \Vdash \pi = \tau_1$．由 $s \in G$ 且 $r \in G$，可取 $p \in G$ 满足 $p \leq s$ 且 $p \leq r$．则对任意 $q \leq p$，存在 $(\pi, s) \in \tau_2$ 使 $q \leq p \leq s$，且 $q \leq p \leq r \Vdash \pi = \tau_1$．故 $\{q \mid \exists(\pi, s) \in \tau_2(q \leq s \wedge q \Vdash \pi = \tau_1)\}$ 在 p 之下稠密，因而 $p \Vdash \tau_1 \in \tau_2$．由绝对性，$(p \Vdash \tau_1 \in \tau_2)^M$．

反过来，假设有 $p \in G$ 使 $(p \Vdash \tau_1 \in \tau_2)^M$，因而 $p \Vdash \tau_1 \in \tau_2$．由绝对性，只需证，$\tau_1^G \in \tau_2^G$．

由定义，集合 $E_{\pi,s} = \{q \leq p \mid \exists(\pi, s) \in \tau_2(q \leq s \wedge q \Vdash \pi = \tau_1)\}$ 在 p 之下稠密．又由 $p \in G$，存在 $q \in G \cap E_{\pi,s}$．取 $(\pi, s) \in \tau_2$ 使 $q \leq s$ 且 $q \Vdash \pi = \tau_1$．由 $q \leq s$ 且 $q \in G$，$s \in G$，因而 $\pi^G \in \tau_2^G$．又由归纳假设，$\pi^G = \tau_1^G$．故 $\tau_1^G \in \tau_2^G$．

以上证明了原子公式的情况．接下来我们对公式 φ 复杂度归纳．

若 $\varphi = \neg\psi$．

假设 $(\neg\psi)^{M[G]}$．则 $\neg(\psi)^{M[G]}$．由归纳假设，不存在 $p \in G$ 满足 $(p \Vdash \psi)^M$．由引理 2.26 (在 M 中相对化)，集合 $\{p \mid (p \Vdash \psi)^M \vee (p \Vdash \neg\psi)^M\}$ 在 $\mathbb{P}$ 中稠密．故，存在 $p \in G$，$(p \Vdash \neg\psi)^M$．

反之，假设 $p \in G$ 且 $(p \Vdash \neg\psi)^M$．反设 $(\psi)^{M[G]}$．由归纳假设，存在 $q \in G$ 有 $(q \Vdash \psi)^M$．取 $r \leq p$ 且 $r \leq q$．与引理 2.26 矛盾．

若 $\varphi = \psi \wedge \theta$．

假设 $(\psi \wedge \theta)^{M[G]}$．即 $\psi^{M[G]} \wedge \theta^{M[G]}$．由归纳假设，存在 $p \in G$，$(p \Vdash \psi)^M$ 且 $(p \Vdash \theta)^M$．由定义，$(p \Vdash \psi \wedge \theta)^M$．

反过来，假设 $p \in G$ 且 $(p \Vdash \psi \wedge \theta)^M$．由定义，$(p \Vdash \psi)^M$ 且 $(p \Vdash \theta)^M$．又由归纳假设得证．

最后，若 $\varphi = \exists x\psi(x)$．

假设 $(\exists x\psi(x))^{M[G]}$．则存在 $\tau \in M^{\mathbb{P}}$，$\left(\psi(\tau^G)\right)^{M[G]}$．由归纳假设，存在 $p \in G$，$(p \Vdash \psi(\tau))^M$．由定义 2.23(iv)，$(p \Vdash \exists x\psi(x))^M$．

反过来，假设 $p \in G$ 且 $(p \Vdash \exists x\psi(x))^M$．由定义，集合 $\{q \leq p \mid \exists\tau \in M^{\mathbb{P}}(q \Vdash \psi(\tau))^M\}$ 在 p 下稠密．故，存在 $q \in G$，使得有 $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ 有 $(q \Vdash \psi(\tau))^M$．又由归纳假设，$\psi(\tau^G)^{M[G]}$．因而 $(\exists x\varphi(x))^{m[G]}$． □

定理 2.2 的布尔代数对应定理是定理 2.2、2.18、2.25 的推论 (取 $\mathbb{P} = \mathbb{B}^+$)，也可由相应的定义直接证明：

***定理 2.27** M 是 ZFC 的可数传递模型，$\mathbb{B}$ 是 M 中完全布尔代数，H 是 $\mathbb{B}$ 上拓殊超滤．任给公式 $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$，$\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n \in M^{\mathbb{B}}$，则

$$\varphi(\dot{x}_1^H, \ldots, \dot{x}_2^H)^{M[H]}，\text{当且仅当 } \|\varphi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)\|^M \in H.$$

在证明定理 2.1 之前，先介绍下述引理．

引理 2.28 (i) $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ 是一阶逻辑公理，$\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbf{V}^{\mathbb{B}}$．则对任意 $p \in \mathbb{P}$，$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$．

(ii) $p \Vdash \varphi \to \psi$，且 $p \Vdash \varphi$，则 $p \Vdash \psi$．

现在我们来完成对定理 2.1 的证明．

引理 2.29 $M[G]$ 是 ZFC 的模型.

证明 外延公理. 我们需证明:

$$\forall X\in M[G]\forall Y\in M[G]\big(\forall z\in M[G](z\in X\leftrightarrow z\in Y)\to X=Y\big). \tag{2.3}$$

由 $M[G]$ 是传递的 (引理 2.19), 容易得 (2.3).

基础公理. 任意以 $\in$ 为二元关系的集合论模型满足.

以下公理除无穷公理外均有如下形式:

$$\forall x_1\dots\forall x_n(\varphi(x_1,\dots,x_n)\to\exists y\psi(x_1,\dots,x_n,y)). \tag{2.4}$$

欲证明其在 $M[G]$ 下的相对化, 只需对任意 $\tau_1,\dots,\tau_n\in M^{\mathbb{P}}$ 设计相应的 $\mathbb{P}$-名 ρ, 使 $\rho\in M$, 并且证明, 如果 $\varphi^{M[G]}(\tau_1^G,\dots,\tau_n^G)$, 那么 $\psi^{M[G]}(\tau_1^G,\dots,\tau_n^G,\rho^G)$.

分离公理. 给定 φ, 对任意 $\tau\in M^{\mathbb{P}}$, 取

$$\rho=\big\{(\pi,p)\bigm|\big(p\Vdash\pi\in\tau\wedge\varphi(\pi)\big)^M\big\}.$$

显然, ρ 是 $\mathbb{P}$-名. 由绝对性, 容易验证 $\rho\in M$.

现任给 $x\in M[G]$, 不妨设 $x=\pi^G$.

假设 $\pi^G\in\tau^G$ 且 $\varphi^{M[G]}(\pi^G)$. 由定理 2.2, 存在 $p\in\mathbb{P}$, 满足 $\big(p\Vdash\pi\in\tau\wedge\varphi(\pi)\big)^M$ (故 $(\pi,p)\in\rho$) 且 $p\in G$, 因而 $\pi^G\in\rho^G$.

反过来, 假设 $\pi^G\in\rho^G$. 则存在 $p\in G$, 使 $(\pi,p)\in\rho$, 即 $\big(p\Vdash\pi\in\tau\wedge\varphi(\pi)\big)^M$. 由定理 2.2, $\pi^G\in\tau^G$ 且 $\varphi^{M[G]}(\pi^G)$.

对集公理. 对 $\tau_1,\tau_2\in M^{\mathbb{P}}$, 令

$$\rho=\operatorname{op}(\tau_1,\tau_2)=\bigcup\big\{\{(\tau_1,p),(\tau_2,p)\}\bigm|p\in\mathbb{P}\big\}. \tag{2.5}$$

显然, ρ 是 $\mathbb{P}$-名. 检查绝对性, 容易证明, $\rho\in M$. 显然, $\tau_1^G,\tau_2^G\in\rho^G$.

并集公理. 对 $\tau\in M^{\mathbb{P}}$, 取

$$\rho=\bigcup\operatorname{dom}\tau.$$

替换公理 给定 φ. 任给 $\tau\in M^{\mathbb{P}}$. 假设

$$(\forall x\in\tau^G\exists!y\varphi(x,y))^{M[G]}. \tag{2.6}$$

我们希望构造 ρ, 使得

$$\big(\forall x\in\tau^G\exists y\in\rho^G\varphi(x,y)\big)^{M[G]} \tag{2.7}$$

给定 $\sigma\in\operatorname{dom}\tau$、 $p\in\mathbb{P}$, 我们在 M 中对下述公式 (及其子公式)

$$\exists\delta\big(\delta\in\mathbf{V}^{\mathbb{P}}\wedge p\Vdash\varphi(\sigma,\delta)\big)$$

使用返身原则 (Reflection Principle)[1], 找到集合 $N\in M$ 使得

$$\exists\delta\in M^{\mathbb{P}}\big(p\Vdash\varphi(\sigma,\delta)\big)^M\leftrightarrow\exists\delta\in N\cap M^{\mathbb{P}}\big(p\Vdash\varphi(\sigma,\delta)\big)^M. \tag{2.8}$$

[1]注意, 返身原则的证明使用了替换公理.

取 $\rho = (N \cap M^{\mathbb{P}}) \times \mathbb{P}$．则 $\rho \in M^{\mathbb{P}}$．

现给定 $\sigma^G \in \tau^G$．由 (2.6)，存在 δ^G 使 $\varphi^{M[G]}(\sigma^G, \delta^G)$．由定理 2.2，存在 $p \in G$，使 $\big(p \Vdash \varphi(\sigma, \delta)\big)^M$．由 (2.8)，不妨设，$\delta \in N$，则 $(\delta, p) \in \rho$，又由 $p \in G$，$\delta^G \in \rho^G$．

幂集公理．对 $\tau \in M^{\mathbb{P}}$．取 $\rho = \big(P(\operatorname{dom}\tau \times \mathbb{P})\big)^M \times \mathbb{P}$．

选择公理 (良序定理)．任给 $\tau \in M^{\mathbb{P}}$．由 M 中良序定理，存在 $\alpha \in M$ 使 $\operatorname{dom}\tau = \big\{\sigma_\xi \bigm| \xi < \alpha\big\}$．令

$$\rho = \big\{\operatorname{op}(\check{\xi}, \sigma_\xi) \bigm| \xi < \alpha\big\} \times \mathbb{P}.$$

无穷公理．$\omega = \check{\omega}^G \in M[G]$，且利用以上已证公理，$\omega$ 对 M、$M[G]$ 是绝对的，即 $\omega^{M[G]} = \omega^M = \omega$． □

引理 2.30 M 是 ZFC 的可数传递模型，$\mathbb{P}$ 是 M 上偏序，G 是 $\mathbb{P}$ 上拓殊滤，$M[G]$ 是拓殊扩张．则对任意 N 满足：N 是 ZFC 的传递模型，$M \subseteq N$ 且 $G \in N$，有 $M[G] \subseteq N$．

证明 τ^G 对 ZFC 传递模型 N 绝对的．故 $M[G] = M[G]^N \subseteq N$． □

三、一致性证明

现在，我们已经具备了力迫法提供的所有工具．本节中，我们将介绍力迫法的一个具体运用．即证明下述定理．

定理 3.1 对任意无穷基数 κ，

$$\operatorname{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \operatorname{Con}(\mathrm{ZFC} + 2^{\aleph_0} \geq \kappa).$$

基于力迫法的一致性证明的核心是设计恰当的偏序．这里，我们将介绍由有穷部分函数组成的偏序．

定义 3.2

$$\operatorname{Fn}(I, J) = \big\{p \subseteq I \times J \bigm| p \text{ 是函数 } \wedge |p| < \omega\big\}.$$

$F(I, J)$ 上的序定义为，$p \leq q$ 当且仅当 $p \supseteq q$.

以下，我们看两个有穷部分函数力迫的例子．

例 3.3 考虑 M 中偏序 $\operatorname{Fn}(\omega, \omega_1)$ 上的拓殊滤 G．由于任意两个部分函数 $p, q \in G$ 相容，所以 $g = \bigcup G$ 是一个函数．对任意 $n \in \omega$，$D_n = \big\{p \bigm| n \in \operatorname{dom} p\big\}$ 在 $\operatorname{Fn}(\omega, \omega_1)$ 中稠密．同样，对任意 $\alpha < \omega_1$，$E_\alpha = \big\{p \bigm| \alpha \in \operatorname{ran} p\big\}$ 也稠密．所以 g 就是从 ω 到 ω_1 的满射？请注意，上述 ω_1 是基础模型 M 中的第二个无穷基数．而 g 是 $M[G]$ 下的函数．所以我们得到的是

$$\big(g \text{ 是从 } \omega \text{ 到 } (\omega_1)^M \text{ 的满射}\big)^{M[G]}.$$

(注意，ω 是绝对的) 因此，$(\omega_1)^M \neq (\omega_1)^{M[G]}$．

例 3.4 对任意基数 $\kappa > \omega$，考虑 $\mathrm{Fn}(\kappa^M \times \omega, \{0,1\}) \in M$. 取 G 是该偏序的一个拓殊滤. 同样， $g = \bigcup G$ 是 $\kappa^M \times \omega$ 到 $\{0,1\}$ 的全函数. 对 $\alpha \in \kappa^M$，定义 $f_\alpha : \omega \mapsto 2$，令

$$f_\alpha(n) = g(\alpha, n).$$

对任意 $\alpha, \beta < \kappa^M$，考虑 $D_{\alpha,\beta} = \{p \mid (\exists n < \omega) p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)\}$. 显然，$D_{\alpha,\beta}$ 稠密. 故存在 $n \in \omega$ 使 $f_\alpha(n) \neq f_\beta(n)$. 因此，在 $M[G]$ 中， $\alpha \mapsto f_\alpha$ 是从 κ^M 到 $2^{\aleph_0}$ 中的一一映射.

同样请注意，根据例 3.3 的提示，我们还需要证明 $\kappa^M = \kappa^{M[G]}$，方能得出 $(\kappa \leq 2^{\aleph_0})^{M[G]}$.

引理 3.5 如果偏序 $\mathbb{P} \in M$ 满足可数链性质，那么

(i) 对任意极限序数 $\alpha \in M$， $(\alpha$ 是正则的$)^M$ 当且仅当 $(\alpha$ 是正则的$)^{M[G]}$.

(ii) 对任意极限序数 $\alpha \in M$，$(\mathrm{cf}\,\alpha)^M = (\mathrm{cf}\,\alpha)^{M[G]}$;

(iii) 对任意序数 $\alpha \in o(M)$， $(\alpha$ 是基数$)^M$ 当且仅当 $(\alpha$ 是基数$)^{M[G]}$.

证明 (i) 由绝对性，且 $M \subseteq M[G]$，若 $f \in M$ 在 M 中是从 β 到 α 的递增、无界映射，那 f 在 $M[G]$ 中也是 β 到 α 的无界映射. 故 α 在 $M[G]$ 中正则蕴含 α 在 M 中正则.

假设 $(\mathrm{cf}\,\alpha = \beta < \alpha)^{M[G]}$，我们希望证明 α 在 M 中也不正则. 由 ω 绝对性， $\beta \geq \omega$ (在 $M[G], M$ 中也都成立). 而且存在 $f \in M[G]$，

$$(f \text{ 是从 } \beta \text{ 到 } \alpha \text{ 的函数 } \wedge\ f[\beta] \text{ 在 } \alpha \text{ 中无界 })^{M[G]}.$$

设 $f = \tau^G$. 由定理 2.2，存在 $p \in G$，

$$\big(p \Vdash \tau \text{ 是从 } \check{\alpha} \text{ 到 } \check{\beta} \text{ 的函数. }\big)^M$$

在 M 中定义函数 $F : \beta \mapsto P(\alpha)$. 对任意 $\gamma < \beta$，令

$$F(\gamma) = \{\xi < \alpha \mid (\exists q \leq p)\big(q \Vdash \tau(\check{\gamma}) = \check{\xi}\big)^M\}.$$

首先，我们证明，对任意 $\gamma < \beta$， $f(\gamma) \in F(\gamma)$，因而 $\bigcup_{\gamma<\beta} F(\gamma)$ 在 α 中无界. 不妨设 $f(\gamma) = \xi$. 则存在 $r \in G$，有 $(r \Vdash \tau(\check{\gamma}) = \check{\xi})^M$. 因此，可以取 $s \leq r$， $s \leq p$，使 $(s \Vdash \tau(\check{\gamma}) = \check{\xi})^M$.

其次证明，对任意 $\gamma < \beta$， $F(\gamma)$ 可数 (在 M 中). 对 $\xi \in F(\gamma)$，在 M 中利用选择公理选择 $q_\xi \leq p$ 使 $(q_\xi \Vdash \tau(\check{\gamma}) = \check{\xi})^M$. 对任意 $\xi, \eta \in F(\gamma)$，若 $\xi \neq \eta$，则 $q_\xi \perp q_\eta$. 因为否则，存在拓殊滤 G_0，使得 $p, q_\xi, q_\eta \in G_0$ 且 $M[G_0]$ 满足 f 是函数， $f(\gamma) = \xi$ 且 $f(\gamma) = \eta$，矛盾. 因此，映射 $\xi \mapsto q_\xi$ 是一一的，且 $\{q_\xi \mid \xi \in F(\gamma)\}$ 是反链. 又由 $\mathbb{P}$ 在 M 中的可数链性质， $F(\gamma)$ 在 M 中可数.

因此，在 M 中， $|\bigcup_{\gamma<\beta} F(\gamma)| \leq \beta \cdot \omega \leq \beta < \alpha$ 且 $\bigcup_{\gamma<\beta} F(\gamma)$ 在 α 中无界. 故 α 在 M 中也不是正则的.

(ii) 令 $(\mathrm{cf}\,\alpha = \mu)^M$．则在 M 中存在递增序列 f 把 μ 共尾映射到 α．由绝对性， f 在 $M[G]$ 中也是 μ 到 α 的共尾映射．而， $(\mu$ 是正则的$)^M$，由 (i)， $(\mu$ 是正则的$)^{M[G]}$．由于，“若存在正则的 μ $(\mu < \alpha)$ 到 α 的共尾映射，则 $\mathrm{cf}\,\alpha = \mu$” 在 $M[G]$ 中真．所以 $(\mathrm{cf}\,\alpha = \mu)^{M[G]}$．

(iii) 若 α 在 $M[G]$ 是基数，则对任意 $\beta < \alpha$， $M[G]$ 中不存在 β 到 α 的共尾映射，由绝对性，在 M 中也不存在．故 α 在 M 中还是基数．

若 α 在 M 中是正则基数．由 (ii)， $(\mathrm{cf}\,\alpha)^{M[G]} = (\mathrm{cf}\,\alpha)^M = \alpha$． α 在 $M[G]$ 是基数．

若 α 是 M 中极限基数．则在 M 中， α 是比它小的后继基数 (正则) 的极限．由绝对性，以及 M 中后继基数也是 $M[G]$ 中基数，在 $M[G]$ 中 α 也是基数的极限，因而是基数． □

引理 3.6 $|J| \le \aleph_0$，则 $\mathrm{Fn}(I, J)$ 有可数链性质．

证明 任给 $A \subseteq \mathrm{Fn}(I, J)$．假设 $|A| > \aleph_0$．我们证明 A 不是反链．

令 $B = \{\mathrm{dom}\,p \mid p \in S\}$．则 $|B| > \aleph_0$．因为否则， $|A| \le |B \times J^{<\aleph_0}| \le \aleph_0 \cdot \aleph_0^{<\aleph_0} = \aleph_0$．因此， B 是一个由有穷集合组成的不可数集合．由 Δ-系统 (Δ-system) 定理 [Kunen, 1980, 49]，存在 $C \subseteq B$， C 是一个 Δ-系统，即存在集合 a，对任意 $x, y \in C$， $x \cap y = a$．令 $D = \{p \in A \mid \mathrm{dom}\,p \in C\}$，则 $|D| > \aleph_0$．由于 $|J^a| \le \aleph_0$，必定存在不可数 $E \subseteq D$，使对任意 $p, q \in E$， $p{\restriction}a = q{\restriction}a$．又由 $\mathrm{dom}\,p = \mathrm{dom}\,q = a$， p 与 q 相容．因此， A 不是反链． □

以上，我们已经证明了，对任意基数 κ．

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + 2^{\aleph_0} \ge \kappa).$$

事实上， $\mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) > \omega$ [Jech, 2002, 55] 是 ZFC 给出的对连续统基数的唯一限制．

***定理 3.7** 对任意无穷基数 κ，若 $\mathrm{cf}\,\kappa > \omega$，则

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \kappa).$$

为便于理解，我们借用布尔代数来陈述证明．首先我们证明下述引理．

***引理 3.8** $\mathbb{P}$ 是偏序， $|\mathbb{P}| = \kappa$，且 $\mathbb{P}$ 有可数链性质．则推论 2.11 中的布尔代数 $\mathbb{B}^+$ 的基数为 $\kappa^{\aleph_0}$．

证明 对任意 $u \in \mathbb{B}^+$，我们构造一个反链 $X_u \subseteq \mathbb{P}$，使 $u = \sum e[X_u] = \sum \{e(p) \mid p \in X_u\}$．由于 $e[\mathbb{P}]$ 在 $\mathbb{B}^+$ 中稠密，由 Zorn 引理，存在 $\mathbb{B}$ 的反链 $Y_u \subseteq e[\mathbb{P}]$．再由选择公理，可得 X_u，使对任意 $v \in Y_u$ 存在唯一 $p \in X_u$ 使得 $e(p) = v$．由推论 2.11(ii)， X_u 是反链．

显然，映射 $u \mapsto X_u$ 是一一的．由 $\mathbb{P}$ 有可数链性质， $|\mathbb{B}^+| \le |\mathbb{P}^\omega| = \kappa^{\aleph_0}$． □

我们证明定理 3.7.

证明　由于 $\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}+\mathrm{GCH})$，我们假设基础模型 M 是 $\mathrm{ZFC}+\mathrm{GCH}$ 的传递模型.

假设在 M 中，κ 是基数且 $\mathrm{cf}\,\kappa > \omega$．令 $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa\times\omega, 2) \in M$，$G$ 是 $\mathbb{P}$ 上任意拓殊滤．我们已经证明，

$$(2^{\aleph_0} \geq \kappa)^{M[G]}.$$

我们希望证明

$$(2^{\aleph_0} \leq \kappa)^{M[G]}. \tag{3.1}$$

在 M 中：$|\mathbb{P}| = (\kappa\times\omega)^{<\omega} \times 2^{<\omega} = \kappa$．$\mathbb{P}$ 是可分的，由推论 2.11 和引理 3.8，存在完全布尔代数 $\mathbb{B}$，使 $(\mathbb{P}, \leq)$ 是 $(\mathbb{B}^+, \leq)$ 的稠密子结构，且 $|\mathbb{B}^+| = \kappa^{\aleph_0}$．

又由定理 2.18，存在 $\mathbb{B}$ 的拓殊超滤 H 使 $M[G] = M[H]$.

任给 $X \in M[H]$，$X \subseteq \omega$．不妨设 $X = \dot{x}^H$．我们证明，总存在 $\dot{y} \in \big(\mathbb{B}^{\mathrm{dom}\,\ddot{\omega}}\big)^M$，[1]使得 $\dot{x}^H = \dot{y}^H$，即 $\|\dot{x} = \dot{y}\| \in H$．令

$$\dot{y} = \big\{(\ddot{n}, u) \bigm| n \in \omega, u = \|\ddot{n} \in \dot{x}\|^M\big\}.^2 \tag{3.2}$$

显然，$\dot{y} \in \big(\mathbb{B}^{\mathrm{dom}\,\ddot{\omega}}\big)^M$．我们证明，$\|\dot{x} = \dot{y}\| = \|\dot{x} \subseteq \dot{y}\| \cdot \|\dot{y} \subseteq \dot{x}\| \in H$.

$\|\dot{y} \subseteq \dot{x}\| = \prod_{n\in\omega}\big(-\dot{y}(\ddot{n}) + \|\ddot{n} \in \dot{x}\|\big)$．由定义，对任意 $n \in \omega$，$-\dot{y}(\ddot{n}) + \|\ddot{n} \in \dot{x}\| = 1$．故 $\|\dot{y} \subseteq \dot{x}\| = 1 \in H$.

$\|\dot{x} \subseteq \dot{y}\| = \prod_{\dot{z}\in\mathrm{dom}\,\dot{x}}\big(-\dot{x}(\dot{z}) + \|\dot{z} \in \dot{y}\|\big)$．给定 $\dot{z} \in \mathrm{dom}\,\dot{x}$．如果 $\dot{x}(\dot{z}) \notin H$．由 H 是超滤，$-\dot{x}(\dot{z}) + \|\dot{z} \in \dot{y}\| \in H$．如果 $\dot{x}(\dot{z}) \in H$．则 $\dot{z}^H \in \dot{x}^H = X \subseteq \omega$．不妨设 $\dot{z}^H = m$．则 $\ddot{m}^H = m \in \dot{x}^H$．由定理 2.27，$\dot{y}(\ddot{m}) = \|\ddot{m} \in \dot{x}\| \in H$．同样，$\|\dot{z} = \ddot{m}\| \in H$．故 $-\dot{x}(\dot{z}) + \|\dot{z} \in \dot{y}\| \geq \|\dot{z} \in \dot{y}\| = \sum_{n\in\omega} \dot{y}(\dot{n}) \cdot \|\dot{z} = \ddot{n}\| \geq \dot{y}(\ddot{m}) \cdot \|\dot{z} = \ddot{m}\| \in H$．因此，对任意 $\dot{z} \in \mathrm{dom}\,\dot{x}$ 都有 $-\dot{x}(\dot{z}) + \|\dot{z} \in \dot{y}\| \in H$．由 H 是拓殊超滤，$\|\dot{x} \subseteq \dot{y}\| \in H$.

接下来，我们证明，在 $M[H]$ 中，存在函数 $f : \big(\mathbb{B}^{\mathrm{dom}\,\ddot{\omega}}\big)^M \mapsto 2^\omega$ 是满射．令

$$\pi = \Big\{\big(\mathrm{OP}(\ddot{y}, \dot{y}), 1\big) \bigm| \dot{y} \in \big(\mathbb{B}^{\mathrm{dom}\,\ddot{\omega}}\big)^M\Big\}.$$

其中 $\mathrm{OP}(\ddot{y}, \dot{y}) = \big\{(\dot{x}, 1), (\dot{y}, 1)\big\}$ 是 $M[H]$ 中有序对 $(\dot{y}, \dot{y}^H)$ 的典范 $\mathbb{B}$-名．则 $\pi^H = \{(\dot{y}, \dot{y}^H) \bigm| \dot{y} \in \big(\mathbb{B}^{\mathrm{dom}\,\ddot{\omega}}\big)^M\big\}$．取 $f = \pi^H$.

至此，我们证明了 $\big(2^\omega \leq |(\mathbb{B}^{\mathrm{dom}\,\ddot{\omega}})^M| = |(\kappa^\omega)^M|\big)^{M[G]}$ (请回忆，$M[G] = M[H]$)．由 $\mathrm{cf}\,\kappa > \omega$，且 GCH 在 M 中真，$(\kappa^\omega = \kappa)^M$，即 $(\kappa^\omega)^M = \kappa$．又由 $M[G]$ 保持基数，$(|\kappa| = \kappa)^{M[G]}$．因此，$\big(2^{\aleph_0} \leq \kappa\big)^{M[G]}$.　□

[1]注意，$\big(\mathbb{B}^{\mathrm{dom}\,\ddot{\omega}}\big)^M = \mathbb{B}^{\mathrm{dom}\,\ddot{\omega}} \cap M = \mathbb{B}^{\mathrm{dom}\,\ddot{\omega}} \cap M^{\mathbb{B}}$．因为，我们希望 $\dot{y}$ 是 M 中的 $\mathbb{B}$-名，即 $\dot{y} \in M^{\mathbb{B}}$．也因此，我们不能简单地令 $\dot{y} = \big\{(\ddot{n}, 1) \bigm| n \in X\big\}$．因为不一定有 $X \in M$.

[2]$\|\varphi\|$ 限制在原子公式下是绝对的，为方便起见，后面证明将省略表示在 M 下相对化的上标 M.

四、结语

我们在第二节中给出了拓殊扩张和力迫关系的一般构造方法，并证明了拓殊扩张模型和力迫关系的基本定理 (定理2.1 和定理 2.2). 这显示了力迫法证明的一般想法就是从基础模型和其中的一个偏序出发，去构造一个比基础模型更大的满足特定要求的拓殊扩张. 这里，为便于理解，基础模型可以被直观地看作现实世界. 其中的偏序关系可视为该现实世界中人们关于某个可能世界的描绘. 拓殊扩张就是人们在现实世界中描绘的一个可能的世界 (被拓殊滤最终确定).

从基础模型及其中偏序到拓殊扩张的构造一般是固定的. 对拓殊扩张的性质 (所满足的语句) 造成影响的主要是基础模型和其中选取的偏序. 在第三节中我们通过选取基础模型中有穷部分函数偏序 $\mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$ 证明了 $\neg$CH 的相对一致性. 接着，我们通过要求基础模型满足 GCH，证明了连续统的基数除了唯一的限制——共尾数不可数，可以在基数序列上任意取值而不会导致矛盾. 因此，当代集合论研究的一项重要工作就是寻找合适的基础模型和其中的偏序，以得出期望的一致性结果.

参考文献

COHEN P J. 1964. The Independence of the Continuum Hypothesis, II[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 51(1):105–110.

ENDERTON H B. 2006. 数理逻辑 (英文版)[M]. 2版. 北京: 人民邮电出版社.

JECH T. 2002. Set Theory[M]. 3rd Millennium, rev. and expanded. Heidelberg: Springer-Verlag.

KUNEN K. 1980. Set Theory: An Introduction to Independence Proofs[M]. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.

VAN HEIJENOORT J. 1967. From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931[M]. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Abstract

Set theory is the most common accepted foundation of mathematics, while ZFC is the most popular axiomatization of set theory. However, ZFC is not a complete theory, i.e. there exists a proposition in the language of set theory such that both itself and its negation are consistent with ZFC. The proofs of consistence is the main work in today's researching in set theory. Forcing is the most powerful method of consistency proof. In this article ,the author introduces the main idea of forcing by two popular exhibition, arbitrary partial order and complete boolean algebra, simultaneity.